2.2 Para toda T t.l con

$T: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ podemos

calcular $T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

donde $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ T(e_1) & \cdots & T(e_n) \\ | & & | \end{bmatrix}$

es decir $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

Veamoslo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2} + \cdots + x_n \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_n}$$

$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n \leftarrow$$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n)$$

$$= T(x_1 \underline{\underline{e_1}}) + T(x_2 \underline{\underline{e_2}}) + \cdots + T(x_n \underline{\underline{e_n}})$$

$$= \boxed{x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2) + \cdots + x_n T(e_n)}$$

$$\boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | & & | \\ T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) & \cdots & T(e_n) \\ | & | & | & & | \end{bmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

la llamamos A_T

nos queda que

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A_T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Las columnas A_T son las transformadas de los canónicos

(calculo A_T calculando $T(e_1), \dots, T(e_n)$ y los coloco como columnas)

Ejercicio (no está en la práctica)

Dada $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ $f\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1+\bar{z}_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$z_1 \in \mathbb{C}$
$z_2 \in \mathbb{C}$ $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} z_1+\bar{z}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$

a) Mostrar que f no es t.l. considerando a $\mathbb{C}^2$ como un espacio vectorial con $K = \mathbb{C}$.

b) Mostrar que f sí es t.l. considerando a $\mathbb{C}^2$ como un espacio vectorial con $K = \mathbb{R}$.

Para $K = \mathbb{R}$

c) Calcular una base del núcleo de f ¿Es monomorfismo?

d) Calcular una base de la imagen de f ¿Es epimorfismo?

Lo hacemos:

$f: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} z_1+\bar{z}_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) $\mathbb{C}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \text{ con } z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C} \right\}$

$\begin{pmatrix} 2+3i \\ -i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$

$\mathbb{C}^2$ lo podemos pensar como un $\mathbb{C}$-ev ó como un $\mathbb{R}$-ev

- $T(kv) = kT(v)$ — no es lo mismo $k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{C}$
- $T(v+u) = T(v) + T(u)$

a) buscamos un contraejemplo

$f(v+u) \neq f(v) + (u)$

o

$f(kv) \neq kf(v)$ ← buscamos acá!

$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + \bar{z}_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$z_1 = a + bi$
$z_2 = c + di$
$\bar{z}_2 = c - di$

$f\begin{pmatrix} a+bi \\ \underbrace{c+di} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bi+c-di \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a+c+(b-\underline{d})i \\ 0 \end{pmatrix}}$

múltiplo → ¿ múltipo ?

$$f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$0+\overline{1}=0+1$
$=1$

$\overline{i}=-i$

$$f\left(i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+\overline{i}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i\\0\end{pmatrix}$$

$i\in\mathbb{C}$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$f\left(i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-i\\0\end{pmatrix}\neq \underbrace{i\,f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}}$$

Resulta que f no es T.L. si escogemos como parámetros números complejos (es decir, si pensamos a $\mathbb{C}^2$ como un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$)

b) $f\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_1+\overline{z_2}\\0\end{pmatrix}$ $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-ev.

$z_1 = a+bi$
$z_2 = c+di$

Tenemos que demostrar que

- 1 si $u \in \mathbb{C}^2$ y $v \in \mathbb{C}^2 \Rightarrow$

$$f(u+v) = f(u+v)$$

- 2 si $u \in \mathbb{C}^2$ y $\underline{\underline{\lambda \in \mathbb{R}}}$

$$f(\lambda u) = \lambda f(u)$$

- 1 $$f\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} z_1+z_3 \\ z_2+z_4 \end{pmatrix} =$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} z_1+z_3+\overline{z_2+z_4} \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} z_1+z_3+\overline{z_2}+\overline{z_4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} z_1+\overline{z_2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_3+\overline{z_4} \\ 0 \end{pmatrix}}$$

- 2 $$\boxed{f\left(\lambda\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right)} = f\begin{pmatrix} \lambda z_1 \\ \lambda z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda z_1 + \overline{\lambda z_2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda z_1 + \bar{\lambda} \bar{z}_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda z_1 + \lambda \bar{z}_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

¡Porque $\bar{\lambda} = \lambda$!

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$= \begin{pmatrix} \lambda (z_1 + \bar{z}_2) \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\lambda \begin{pmatrix} z_1 + \bar{z}_2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$= \boxed{\lambda f \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}}$$

$K = \mathbb{R}$

c) Una base del núcleo

$$f \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + \bar{z}_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z_1 + \bar{z}_2 = 0 \qquad (0 + 0i)$$

$$a + bi + c - di = 0 + 0i$$

$$a + c + (b - d) i = 0 \implies$$

$$a + c = 0 \quad y \quad b - d = 0$$

$c = -a$
$d = b$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bi \\ -a+bi \end{pmatrix} = \underbrace{a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}}_{a,\, b\, \in \mathbb{R}}$$

$$Nu(f) = \text{gen}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}}_{\text{son l.i}} \right\}$$

$$B_{Nu(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \right\}$$

No es monomorfismo

---

d) $Im(f)$ ← calculamos el generado por los transformados de una base de $\mathbb{C}^2$

$$B_{\mathbb{C}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$$ ← con $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-ev ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

$$\cancel{B_{\mathbb{C}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}} \leftarrow \text{con } \mathbb{C}^2 \ \mathbb{C}\text{-ev } (\mathbb{K} = \mathbb{C})$$

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{gen}\left\{ f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \operatorname{gen}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \cancel{\begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix}}} \right\} =$$

No son l.i

$$\begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{no sirve}}$$

no son múltiplos

$\Downarrow$

son li

$$\boxed{B_{\operatorname{Im}(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

<u>No es epimorfismo</u>

<u>Teo de la dimensión</u> ¡se cumple!

$$\underbrace{\dim(\operatorname{Nu}(f))}_{2} + \underbrace{\dim(\operatorname{Im}(f))}_{2} = \underbrace{\dim(\mathbb{C}^2)}_{4}$$